Aufgabe 1

Lineare Funktion von Messgrößen

- Ein **<u>Bauteil</u>** wird geometrisch vermessen.
- Messgrößen sind die Länge $\boldsymbol{X_1}$ und Breite $\boldsymbol{X_2}$ des Bauteils.
- $\boldsymbol{X_1}$ und $\boldsymbol{X_2}$ sind normalverteilt und voneinander unabhängig.
- Für die Grundgesamtheit der gegebenen Messgrößen des Bauteiltyps wird angenommen:
  - $\boldsymbol{\mu_1 = 10\ cm}$
  - $\boldsymbol{\mu_2 = 3\ cm}$
  - $\boldsymbol{\sigma_1 = 0,3\ cm}$
  - $\boldsymbol{\sigma_2 = 0,1\ cm}$

a. Berechnen Sie den Erwartungswert der indirekten Messgröße Bauteil-Umfang $y = 2X_1 + 2X_2$ und führen Sie eine Fehlerrechnung nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz nach Gauß durch!

$$\boldsymbol{Y = 26\ cm\ \mp 0,6326\ cm}$$

b. Wenn über die Unabhängigkeit von X_1 und X_2 keine Aussage zu treffen ist, was gilt dann für die zu erwartende Messabweichung?

$$\boldsymbol{Y = 26\ cm\ \mp 0,8\ cm}$$

c. Bestimmen Sie Mittelwert und Standardabweichung von Y unter der Bedingung, dass für das Bauteil $Corr(X_1X_2)$ = 0,6 gilt.

$$\boldsymbol{Y = 26\ cm\ \mp 0,7376\ cm}$$

Aufgabe 1

Lineare Funktion von Messgrößen

d. **Bestimmen Sie - auf Basis der in Aufgabe 1.a ermittelten Größen für Mittelwert und Standardabweichung – die Wahrscheinlichkeit, dass ein zu vermessendes Bauteil einen Umfang von 28 cm übersteigt.**

$$P\left(\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y} > \frac{28cm - 26cm}{0,6325cm}\right) \approx P(z > 3,16) = 1 - P(z \leq 3,16) \approx 1 - 0,9992 = 0,0008$$
$$= 0,08\%$$

Aufgabe 1

Lineare Funktion von Messgrößen

e. **Bestimmen Sie Mittelwert und Standardabweichung von Y unter der Bedingung, dass für das Bauteil $Corr(X_1 X_2)$ = -1 gilt.**

$$Y = 26\ cm\ \mp 0,4\ cm$$

f. **5 Bauteile werden entnommen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass für diese Stichprobe das ermittelte arithmetische Mittel des Umfanges $\overline{Y} > 27cm$ ist?**

Es gilt für den Standardfehler des Mittelwerts $\sigma_{\overline{x}}$:

$$\sigma_{\overline{Y}} = \overline{Y} - \mu = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} = \frac{0,6326}{\sqrt{5}} = 0,2829cm$$

Es folgt nach dem zentralen Grenzwerttheorem:

$$P\left(\frac{\overline{Y} - E(Y)}{\frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}} > \frac{27cm - 26cm}{0,2829cm}\right)$$
$$\approx P(z > 3,53) = 1 - P(z \leq 3,53) \approx 0,0002 = 0,02\%$$

Aufgabe 2

Nicht-Lineare Funktion von Messgrößen

- Für die Elektrische Leistung P in einem Stromkreis gilt $\boldsymbol{P = U * I}$ mit $\boldsymbol{U = R * I.}$
- Annahme 1: Alle Messgrößen sind voneinander unabhängig.
- Annahme 2: Der Widerstand R ist konstant mit **R = 40 Ω.**
- Für die Stromstärke gilt:
  - $\boldsymbol{\mu_I = 10\ A}$
  - $\boldsymbol{\sigma_I = 0,05\ A}$

Berechnen Sie den Erwartungswert der Leistung P und führen Sie eine Fehlerrechnung nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz nach Gauß durch!

$$\boldsymbol{P = 4000W \mp 40W}$$

Aufgabe 3

- In einem Stromkreis sind zwei Widerstände parallel geschaltet.
- Für die beiden Widerstände $\boldsymbol{R_1}$ und $\boldsymbol{R_2}$ gilt:
  - $\boldsymbol{\mu_1 = 25\ \Omega}$
  - $\boldsymbol{\mu_2 = 100\ \Omega}$
  - $\mathbf{V(R_1) = 1\ \Omega}$
  - $\mathbf{V(R_2) = 2\ \Omega}$

- Für den Gesamtwiderstand R des Stromkreises gilt:

$$\boldsymbol{R = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}}$$

Berechnen Sie den Gesamtwiderstand R und führen Sie eine Fehlerrechnung nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz nach Gauß durch!

$$\boldsymbol{R \approx 20\Omega \mp 0{,}6425\Omega}$$

Aufgabe 7 „Wärmestrom“

Gegeben ist ein Prozess, bei dem eine bestimmte Wärmeleistung von einem Verbraucher an einem Wärmeübertrager abgenommen wird. Berechnen Sie zunächst diese Wärmeleistung unter folgenden Bedingungen:

- Massenströmung von 1 kg/s
- Medium: Wasser
- Die Temperaturen vor und nach dem Wärmeübertrager sind: T_1=298 K und T_2=313 K

Formel:

$$\dot{Q}(\dot{m}, c_P, T_1, T_2) = \dot{m} \cdot c_P \cdot \Delta T = \dot{m} \cdot c_P \cdot (T_2 - T_1)$$

Bezeichnung / Art des Sensors	Standartabweichungen vom Hersteller angegeben
MID 50P15	±0,5 % v.M.
Platin-Widerstandsthermometer	Klasse A: σ=0,15K+0,002*(T-273,15K)

Wie groß ist der Gauß‘sche-Fehler der Berechnung?

Lösung Aufgabe 7

$$\dot{m} = 1\,\frac{kg}{s}$$

$$T_1 = 298\,K$$

$$T_2 = 313\,K$$

$$\dot{Q}(\dot{m}, cp, T_1, T_2) = \dot{m} * cp * (T_2 - T_1) \quad \text{mit } cp = \text{const}$$

$$= 1\,\frac{\cancel{kg}}{\cancel{s}} * 4{,}18\,\frac{k\cancel{J}^{W\cancel{s}}}{\cancel{kg}\,\cancel{K}} + (313\,\cancel{K} - 298\,\cancel{K}) = 62{,}7\,kW$$

$$\sigma_{\dot{Q}} = \pm\sqrt{\sigma_{\dot{m}}{}^2\left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{m}}\right)^2 + \sigma_{T_1}{}^2\left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial T_1}\right)^2 + \sigma_{T_2}{}^2\left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial T_2}\right)^2}$$

$$\sigma_{\dot{m}} = 0{,}5\% * 1\,\frac{kg}{s} = 0{,}005\,\frac{kg}{s}$$

$$\sigma_{T_1} = 0{,}15\,K + 0{,}002\,(298\,K - 273\,K) = 0{,}2\text{ K}$$

$$\sigma_{T_2} = 0{,}15\,K + 0{,}002\,(313\,K - 273\,K) = 0{,}23\text{ K}$$

Lösung Aufgabe 7

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{m}} = \frac{\partial(\dot{m}\, cp(T_2 - T_1))}{\partial \dot{m}} = cp(T_2 - T_1) = 4{,}18\,\frac{kJ}{kg\cancel{K}}(313\,\cancel{K} - 298\,\cancel{K}) = 62{,}7\,\frac{kWs}{kg}$$

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial T_1} = \frac{\partial(\dot{m}\, cp\, T_2 - \ \dot{m}cp\, T_1)}{\partial T_1} = -cp\,\dot{m} = -4{,}18\,\frac{kW\cancel{s}}{\cancel{kg}K}1\,\frac{\cancel{kg}}{\cancel{s}} = -4{,}18\,\frac{kW}{K}$$

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial T_2} = \frac{\partial(\dot{m}\, cp\, T_2 - \ \dot{m}cp\, T_1)}{\partial T_2} = cp\,\dot{m} = 4{,}18\,\frac{kW\cancel{s}}{\cancel{kg}K}1\,\frac{\cancel{kg}}{\cancel{s}} = 4{,}18\,\frac{kW}{K}$$

$$\sigma_{\dot{Q}} = \pm\sqrt{\left(0{,}005\,\frac{\cancel{kg}}{\cancel{s}}62{,}7\,\frac{kW\cancel{s}}{\cancel{kg}}\right)^2 + 0{,}2\,\cancel{K}\left(-4{,}18\,\frac{kW}{\cancel{K}}\right)^2 + \left(0{,}23\,\cancel{K} * \ 4{,}18\,\frac{kW}{\cancel{K}}\right)^2}$$

$$= \pm\sqrt{0{,}0983\,kW^2 + 0{,}69\,kW^2 + 0{,}92\,kW^2}$$

$$\underline{= \pm 1{,}307\,kW}$$

$$\underline{\dot{Q} = 62{,}7\,kW \pm 1{,}307\,kW}$$

Aufgabe 8 „Ohmsche Reihenschaltung “

An einer Reihenschaltung von ohmschen Widerständen soll der Gesamtwiderstand bestimmt werden. Dieser berechnet sich nach folgender Formel:

$$R_{ges} = U/I + R_2.$$

Die Spannung U und der Strom I des Widerstandes R_1 sowie der Wert des Widerstandes R_2 sind bekannt, ebenso die Einzelunsicherheiten:
Bestimmen Sie die Unsicherheit des Gesamtwiderstandes nach dem Gauß'schen Verfahren!

$U = 24$ V	$\sigma_U = \pm 2V$
$I = 1$ A	$\sigma_I = \pm 1/12$ A
$R_2 = 100$ V/A	$\sigma_{R2} = \pm 1V/A$

Lösung Aufgabe 8

$$R_{ges} = \frac{U}{I} + R_2 = \frac{24\ V}{1\ A} + 100\frac{V}{A} = 124\frac{V}{A}$$

$$\sigma_{R_G} = \pm\sqrt{\left(\sigma_U \frac{\partial R_G}{\partial U}\right)^2 + \left(\sigma_I \frac{\partial R_G}{\partial I}\right)^2 + \left(\sigma_R \frac{\partial R_G}{\partial R}\right)^2}$$

$$\frac{\partial R_G}{\partial U} = \frac{\partial(\frac{U}{I} + R_2)}{\partial U} = \frac{1}{I} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{\partial R_G}{\partial I} = \frac{\partial(\frac{U}{I} + R_2)}{\partial I} = -\frac{U}{I^2} = -\frac{24V}{1A^2}$$

$$\frac{\partial R_G}{\partial R} = \frac{\partial(\frac{U}{I} + R_2)}{\partial R} = 1$$

Lösung Aufgabe 8

$$\sigma_{R_G} = \pm\sqrt{\left(2V\,\frac{1}{1A}\right)^2 + \left(\frac{1\cancel{A}}{12} * \frac{24V}{1A^{\cancel{2}}}\right)^2 + \left(\frac{1V}{A} * 1\right)^2}$$

$$= \pm\sqrt{4\,\frac{V^2}{A^2} + 4\,\frac{V^2}{A^2} + 1\,\frac{V^2}{A^2}}$$

$$= \pm 3\,\frac{V}{A}$$

$$\sigma_{R_G} = 124\,\frac{V}{A} \pm 3\,\frac{V}{A}$$